



# Osnove telekomunikacija

Doc. dr Enis Kočan ([enisk@ucg.ac.me](mailto:enisk@ucg.ac.me))

*Saradnici:* Dr Uglješa Urošević ([ugljesa@ucg.ac.me](mailto:ugljesa@ucg.ac.me))

MSc Slavica Tomović ([slavicat@ucg.ac.me](mailto:slavicat@ucg.ac.me))

# SADRŽAJ KURSA

---

1. Uvod. Opšti model telekomunikacionog sistema. Vrste prenosa signala.
2. Medijumi za prenos. Pojam modulacije.
3. Multipleksiranje. Referentni model za povezivanje otvorenih sistema (OSI i TCP/IP)
4. Harmonijska analiza periodičnih signala
5. Analiza aperiodičnih signala i slučajnih signala
6. Prenos signala kroz linearne sisteme. Izobličenja pri prenosu signala
7. Amplitudske modulacije
8. Demodulacija AM signala. Realizacija multipleksa sa frekvencijskom raspodelom kanala
- 9. Ugaona modulacija. Spektar UM signala**
10. FM modulatori. Demodulacija FM signala
11. Slučajni šum. Karakteristike uskopojasnog šuma
12. Uticaj šuma na prenos amplitudski moduliranih signala
13. Uticaj šuma na prenos ugaono moduliranih signala

# Termin 9 - Sadržaj

---

- **Ugaona modulacija (UM)**
- Frekvencijska i fazna modulacija
- Spektar ugaono moduliranih signala
- Analiza potrebne širine opsega sistema za prenos UM signala

# Ugaona modulacija

- Ugaona modulacija spada u **nelinearne postupke modulacije**
- Dobijeni modulirani signal je kontinualan.
- Kao i u slučaju amplitudske modulacije, nosilac ima sinusoidalni talasni oblik.
  - Osnovni parametri nosioca su amplituda i ugao
- U postupku **amplitudske** modulacije **amplituda** nosioca je modifikovana u zavisnosti od modulišućeg signala, a ugao ostaje nepromijenjen.
- U postupku ugaone modulacije amplituda nosioca ostaje nepromijenjena, a njegov ugao se modifikuje modulišućim signalom i postaje karakterističan parametar u kome je sadržana prenošena poruka.
- Nosilac:

$$u_0(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi(t))$$

AM →  $U_0$       FM →  $\omega_0 t$       PM →  $\varphi(t)$

- Opšti izraz za ugaono modulisan signal glasi:

$$u(t) = U_0 \cos \Phi(t) = U_0 \cos [\omega_0 t + \varphi(t)] = U_0 \cos \{\omega_0 t + \gamma [u_m(t)]\}$$

- Ugao

$$\Phi(t) = \omega_0 t + \varphi(t) = \omega_0 t + \gamma [u_m(t)] = \Phi_0 + \gamma [u_m(t)] = \Phi_i$$

naziva se **trenutna faza**.

- Veličina:

$$\varphi(t) = \gamma [u_m(t)] = \delta \Phi_i$$

koja predstavlja odstupanje trenutne faze  $\Phi_i$  od vrijednosti  $\Phi_0 = \omega_0 t$  zove se **trenutna devijacija faze**.

- Izvod trenutne faze  $\Phi_i = \Phi(t)$  po vremenu:

$$\omega_i = \frac{d\Phi_i}{dt} = \frac{d\Phi(t)}{dt} = \omega_0 + \frac{d\varphi(t)}{dt}$$

naziva se **trenutna kružna učestanost** ugaono modulisanog signala.

- Odstupanje trenutne kružne učestanosti  $\omega_i$  od kružne učestanosti nosioca  $\omega_0$ :

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \omega_i - \omega_0 = \delta\omega_i$$

**trenutna devijacija kružne učestanosti** ugaono modulisanog signala.

# Termin 9 - Sadržaj

---

- Ugaona modulacija (UM)
- **Frekvencijska i fazna modulacija**
- Spektar ugaono moduliranih signala
- Analiza potrebne širine opsega sistema za prenos UM signala

# Fazna i frekvencijska modulacija

1. Fazno modulirani signal je onaj čija je trenutna devijacija faze proporcionalna modulišućem signalu.

$$\delta \Phi_i = \varphi(t) = k_\varphi u_m(t), \quad k_\varphi = \text{const.}$$

- Modulišuci signal  $u_m(t)$  je:

$$u_m(t) = U_m m(t) \quad U_m = |u_m(t)|_{\max}$$

- Vremensku promjenu modulišućeg signala  $u_m(t)$  karakteriše normalizovana funkcija  $m(t)$  koja zadovoljava uslov da je  $|m(t)| < 1$ ,  $|m(t)|_{\max} = 1$ . Stoga je:

$$|\delta \Phi_i|_{\max} = |\varphi(t)|_{\max} = k_\varphi |u_m(t)|_{\max} = k_\varphi |U_m m(t)|_{\max} = k_\varphi U_m = \Delta \Phi_0$$

- Veličina  $\Delta \Phi_0$  naziva se **maksimalna devijacija faze** ili **devijacija faze**.

$$\Phi_i = \Phi(t) = \omega_0 t + k_\varphi u_m(t) = \omega_0 t + \Delta \Phi_0 m(t)$$

- Konačno, izraz za fazno modulirani signal glasi:

$$u(t) = U_0 \cos \Phi(t) = U_0 \cos [\omega_0 t + k_\varphi u_m(t)] = U_0 \cos [\omega_0 t + \Delta \Phi_0 m(t)]$$

2. Frekvencijski modulisan signal je onaj čija je trenutna devijacija učestanosti proporcionalna modulišućem signalu.

$$\delta f_i = \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(t)}{dt} = k_f u_m(t); \quad k_f = \text{const.}$$

**Maksimalna devijacija učestanosti**, ili često samo **devijacija učestanosti**

$$|\delta f_i|_{\max} = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{d\varphi(t)}{dt} \right|_{\max} = k_f |u_m(t)|_{\max} = k_f |U_m m(t)|_{\max} = k_f U_m = \Delta f_0$$

- Ako je riječ o kružnoj učestanosti, trenutna devijacija kružne učestanosti

$$\delta\omega_i = \frac{d\varphi(t)}{dt} = k_\omega u_m(t); \quad k_\omega = 2\pi k_f = \text{const.}$$

- Veličina

$$|\delta\omega_i|_{\max} = \left| \frac{d\varphi(t)}{dt} \right|_{\max} = k_\omega |u_m(t)|_{\max} = k_\omega |U_m m(t)|_{\max} = k_\omega U_m = \Delta\omega_0$$

se naziva **maksimalna devijacija kružne učestanosti** ili **devijacija kružne učestanosti**.

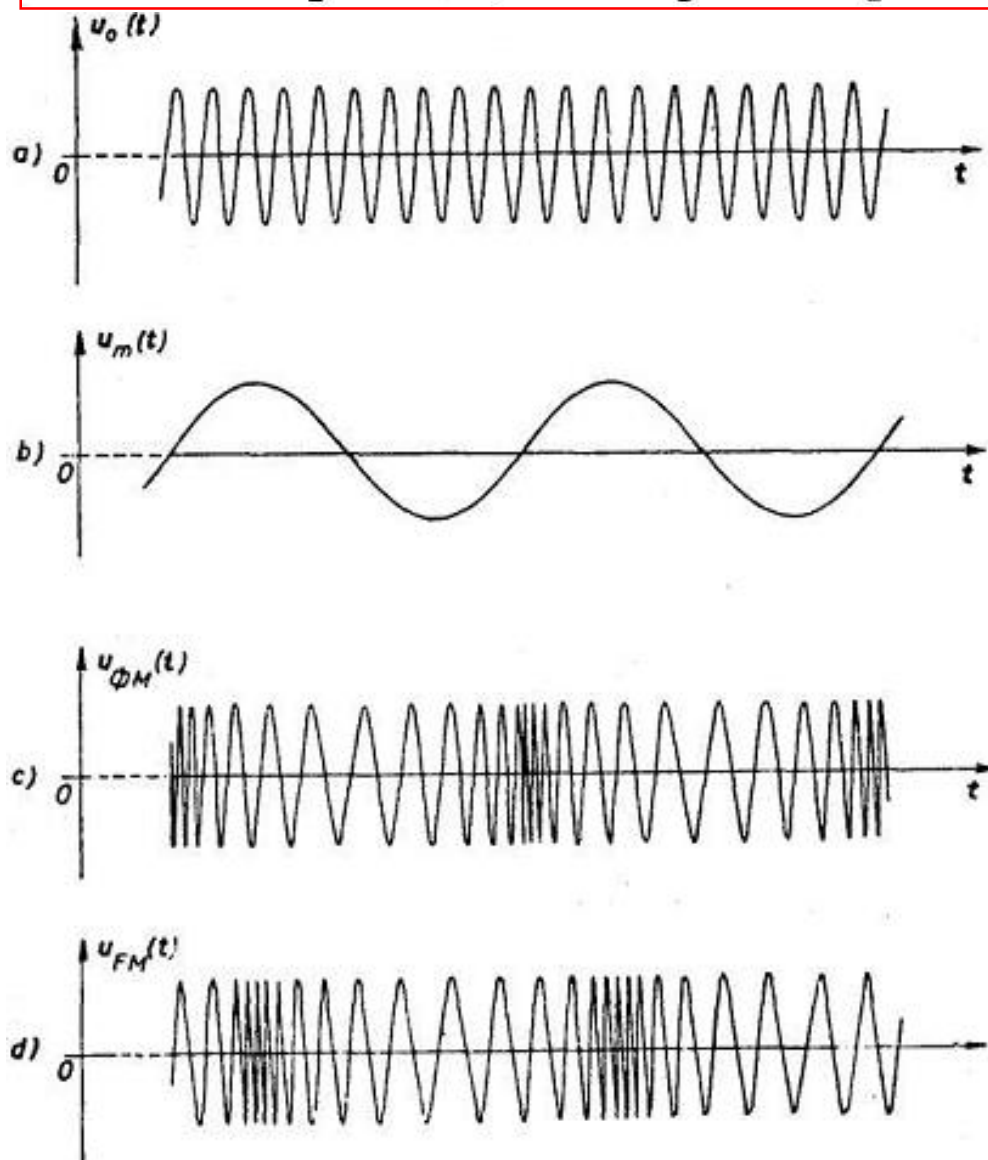
- Trenutna kružna učestanost je:

$$\omega_i = \omega_0 + \frac{d\varphi(t)}{dt} = \omega_0 + k_\omega u_m(t) = \omega_0 + k_\omega U_m m(t) = \omega_0 + \Delta\omega_0 m(t)$$



Sada je izraz za frekvencijski modulisani signal:

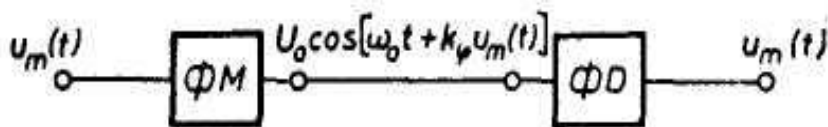
$$u(t) = U_0 \cos \left[ \omega_0 t + k_\omega \int u_m(t) dt \right] = U_0 \cos \left[ \omega_0 t + \Delta\omega_0 \int m(t) dt \right]$$



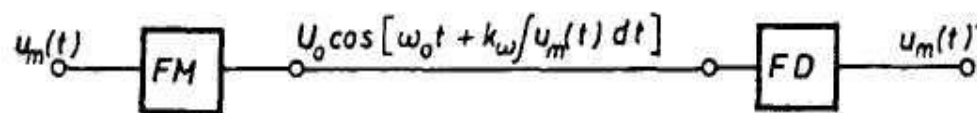
Slika: a) Nosilac; b) modulišuci signal;  
c) fazno modulisan signal;  
d) frekvencijski modulisan signal

# Opšta veza između fazne i frekvencijske modulacije

- Na slici su prikazane blok-šeme sistema za prenos signala faznom i frekvencijskom modulacijom.
- $\Phi M$  - fazni modulator;  $\Phi D$  - fazni demodulator
- $FM$  - frekvencijski modulator;  $FD$  - frekvencijski demodulator



Slika: Blok-šema za prenos signala faznom modulacijom



Slika: Blok-šema za prenos signala frekvencijskom modulacijom

- Na izlazu iz faznog modulatora trenutna devijacija faze nosioca direktno je srazmjerna modulišućem signalu, a na izlazu frekvencijskog modulatora trenutna devijacija faze nosioca proporcionalna je integralu modulišućeg signala.
- Što se tiče demodulatora, fazni demodulator na svom izlazu mora dati signal direktno srazmjeran trenutnoj devijaciji faze nosioca na njegovom ulazu, dok frekvencijski demodulator daje signal direktno proporcionalan izvodu trenutne devijacije faze nosioca na svom ulazu.

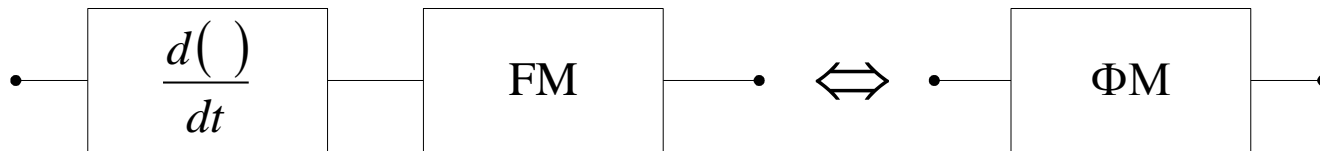
- Imajući u vidu odnose između trenutne devijacije faze nosioca i prenošenog signala u modulatoru i demodulatoru, koji karakterišu opštu vezu između fazne i frekvencijske modulacije, moguće je upotrebom posebnih sklopova od faznog modulatora/demodulatora napraviti frekvencijski i obrnuto.

- $\Phi M = \text{diferencijator} + FM$
- $\Phi D = FD + \text{integrator}$
- $FM = \text{integrator} + \Phi M$
- $FD = \Phi D + \text{diferencijator}$

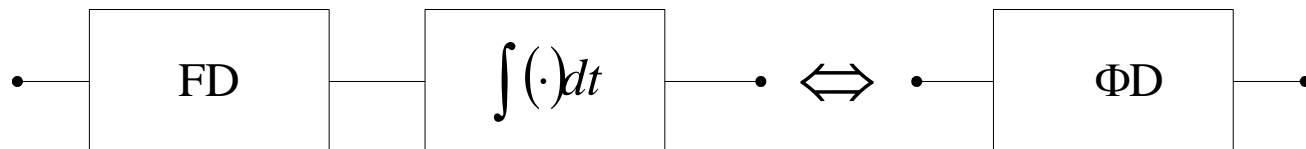
- Ako na ulaz FM modulatora dovedemo signal  $du_m(t)/dt$  izlaz iz modulatora će biti:

$$u_{FM}(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + k_\omega u_m(t)) = u_{\Phi M}(t)$$

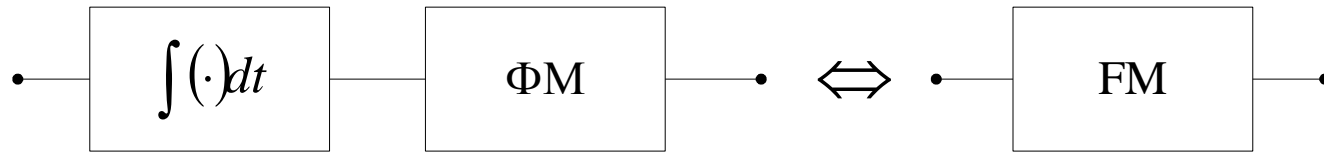
tj.  $\Phi M$  modulator će biti kaskadna veza diferencijatora i FM modulatora.



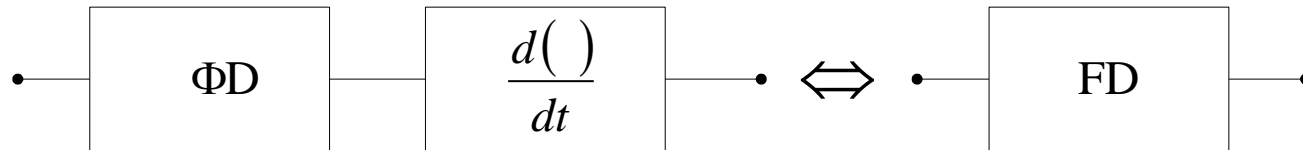
- Demodulacija je obrnuti proces:



3. Ako signal prije ulaska u  $\Phi M$  modulator prođe kroz kolo za integriranje, na izlazu sistema dobiće se modulisan signal čija je trenutna devijacija faze direktno srazmjerna integralu modulišućeg signala, a to je u stvari frekvencijski modulisani signal.



4. Demodulacija je obrnuti proces:



# Termin 9 - Sadržaj

---

- Ugaona modulacija (UM)
- Frekvencijska i fazna modulacija
- **Spektar ugaono moduliranih signala**
- Analiza potrebne širine opsega sistema za prenos UM signala

# Spektar ugaono modulisanih signala

---

- Proces amplitudske modulacije se sastoji u translaciji spektra modulišućeg signala, odnosno, svakoj komponenti iz spektra modulišućeg signala čija je učestanost  $f_m$ , u spektru AM signala odgovaraju dvije komponente simetrično smještene u odnosu na nosilac:  $f_0 + f_m$  i  $f_0 - f_m$ . Proces amplitudske modulacije je **linearan** jer važi zakon superpozicije komponenata. Bitna osobina spektra AM signala je da nema generisanja novih komponenata čije su učestanosti različite od onih koje su nastale opisanom translacijom.
- Kod ugaone modulacije to nije slučaj.
- Komponente iz spektra ovako modulisanog signala vrlo su složeno vezane za komponente modulišućeg signala.
- Spektar UM signala je, čak i u najjednostavnijem slučaju (modulišućí signal je jedna sinusoidalna funkcija), **neograničen**. Tj. u procesu ugaone modulacije jedna komponenta generiše beskonačno mnogo komponenata različitih učestanosti.
- Proces ugaone modulacije je u suštini **nelinearan** i zato zakon superpozicije ne važi.

## Spektar UM signala kada je modulišući signal u obliku sinusoidalnog test tona:

- Pretpostavimo da je modulišući signal dat jednostavnim analitičkim izrazom:

$$u_m(t) = U_m \cos \omega_m t$$

- Izraz za fazno i frekvencijski modulisan signal ovakvim modulisućim signalom je:

$$u_{\Phi M}(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + k_\varphi U_m \cos \omega_m t)$$

$$u_{FM}(t) = U_0 \cos\left(\omega_0 t + k_\omega \frac{U_m}{\omega_m} \sin \omega_m t\right)$$

- Odnosno, dovoljno je razmatrati sledeći slučaj:

$$u_{UM}(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + m \cos \omega_m t)$$

- Veličina ***m*** predstavlja maksimalnu devijaciju faze ugaono modulisanog signala, naziva se ***indeks ugaone modulacije***, i za slučaj **fazno modulisanog signala** iznosi:

$$m = k_\varphi U_m = \Delta\Phi_0$$

a za slučaj **frekvencijski modulisanog signala** on je:

$$m = \frac{k_\omega U_m}{\omega_m} = \frac{\Delta\omega_0}{\omega_m} = \frac{\Delta f_0}{f_m}$$

- Izraz za UM signal može da se predstavi u vidu sume prostoperiodičnih komponentata, a za to se koriste određeni identiteti iz teorije [Besselovih funkcija](#). Važi da je:

$$\sin(\alpha + m \sin \beta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m) \sin(\alpha + n\beta)$$

$$\cos(\alpha + m \sin \beta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m) \cos(\alpha + n\beta)$$

$$\sin(\alpha + m \cos \beta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m) \sin\left(\alpha + n\beta + n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos(\alpha + m \cos \beta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m) \cos\left(\alpha + n\beta + n\frac{\pi}{2}\right)$$

- $J_n(m)$  je Besselova funkcija prve vrste  $n$ -tog reda za argument  $m$ .
- Sada je UM signal:

$$u(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + m \cos \omega_m t) = U_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m) \cos\left[(\omega_0 + n\omega_m)t + n\frac{\pi}{2}\right]$$



- Ovaj izraz može da se zapiše i u obliku:

$$u(t) = U_0 \left\{ J_0(m) \cos \omega_0 t + \sum_{n=-\infty}^{-1} J_n(m) \cos \left[ (\omega_0 + n \omega_m) t + n \frac{\pi}{2} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(m) \cos \left[ (\omega_0 + n \omega_m) t + n \frac{\pi}{2} \right] \right\}$$

- Kako za Besselove funkcije važi:

$$J_{-n}(m) = (-1)^n J_n(m)$$

- i važi:

$$\cos \left[ (\omega_0 - n \omega_m) t - n \frac{\pi}{2} \right] = (-1)^n \cos \left[ (\omega_0 - n \omega_m) t + n \frac{\pi}{2} \right]$$

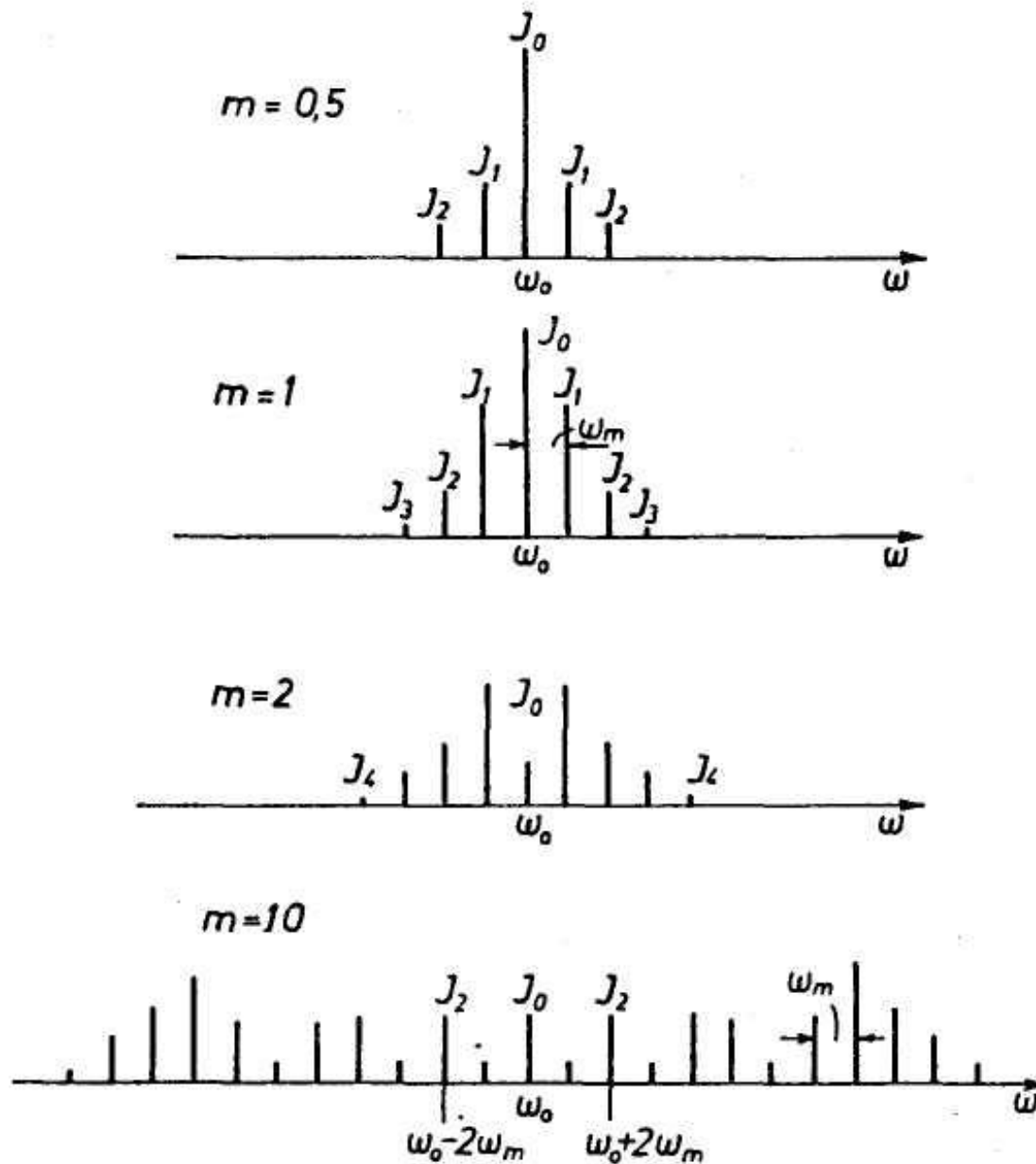
- To izraz za UM signal postaje:

$$u(t) = U_0 J_0(m) \cos \omega_0 t + U_0 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(m) \left\{ \cos \left[ (\omega_0 - n \omega_m) t + \frac{n \pi}{2} \right] + \cos \left[ (\omega_0 + n \omega_m) t + n \frac{\pi}{2} \right] \right\}$$

- Za dati indeks modulacije  $m$  i za izabranu vrijednost  $n=1, 2, 3, \dots$ , Besselova funkcija  $J_n(m)$  predstavlja konstantu. U izrazu koji predstavlja ugaono modulisan signal razlikujemo tri dijela:

- Nosilac čija je amplituda  $U_0 J_0(m)$ , a učestanost  $\omega_0$
- Beskonačno mnogo komponenti oblika  $U_0 J_n(m) \cos(\omega_0 - n \omega_m) t$
- Beskonačno mnogo komponenti oblika  $U_0 J_n(m) \cos(\omega_0 + n \omega_m) t$

- Vidimo da je spektar **neograničen** i **diskretan** a komponente se nalaze lijevo i desno od nosioca, pri čemu je razmak između dvije susjedne komponente u spektru  $\omega_m$ .



*Slika: Amplitudski spektri ugaono modulisanog signala sinusoidalnim test tonom za razne vrijednosti indeksa modulacije  $m$ .*

- U slučaju kada je modulišući signal složeniji, npr. kada je suma 2 sinusoidalna signala, pokazuje se da:
  - zakon superpozicije u analizi spektra ne važi.
  - u opštem slučaju viši bočni opseg nije simetričan nižem. Znači, prenošena poruka nije sadržana u svakom od bočnih opsega, pa se ne može, kao kod AM signala, prenositi samo jedan bočni opseg.

# Termin 9 - Sadržaj

---

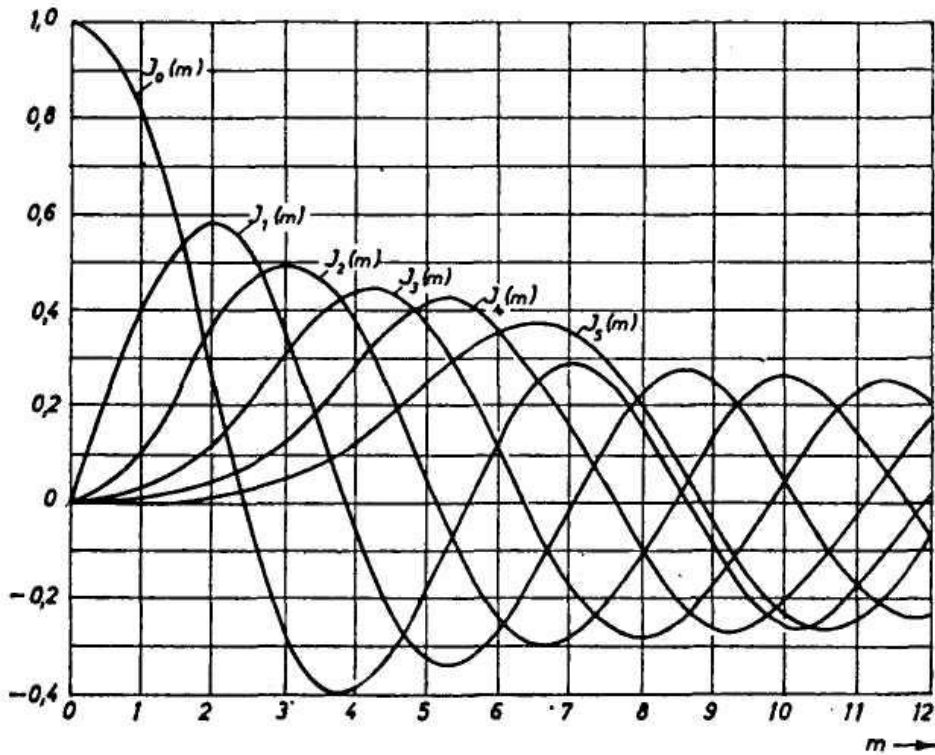
- Ugaona modulacija (UM)
- Frekvencijska i fazna modulacija
- Spektar ugaono moduliranih signala
- **Analiza potrebne širine opsega sistema za prenos UM signala**

# Analiza potrebne širina propusnog opsega sistema za prenos UM signala

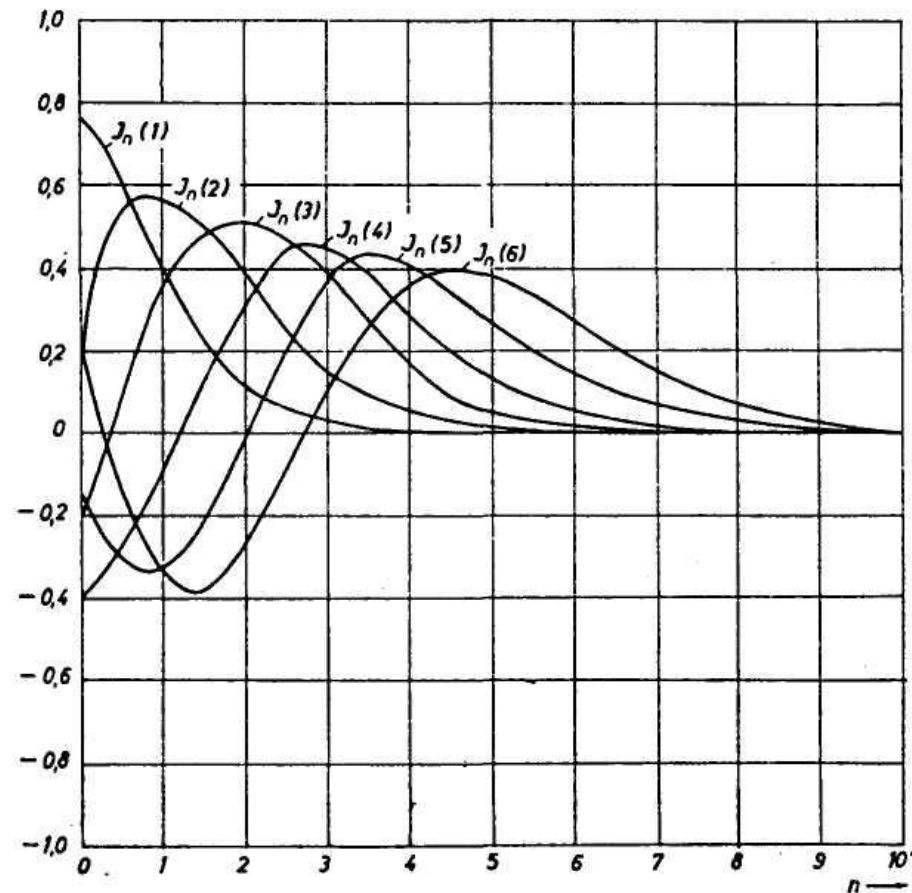
---

- Amplitude pojedinih spektralnih komponenata ugaono modulisanog signala zavise od Besselovih funkcija  $J_n(m)$ .
- Da bi se odredila struktura amplitudskog spektra UM signala potrebno je analizirati kako zavisi  $J_n(m)$  od indeksa modulacije  $m$  i reda funkcije  $n$  koji određuje red bočnih komponenata.
  - Za neke vrijednosti  $m$  i  $n$ , Besselove funkcije imaju relativno vrlo malu vrijednost, pa će se one u određenim uslovima moći i zanemariti.
- Zanemarivanjem pojedinih komponenata sistem za prenos se može dimenzionisati tako da ima ograničen propusni opseg, a da degradacija kvaliteta prenosa bude u dozvoljenim granicama.

# NEKE KARAKTERISTIČNE OSOBINE BESSELOVIH FUNKCIJA



Slika: Besselove funkcije  $J_n(m)$ ;  
 $n=const, m=var.$



Slika: Besselove funkcije  $J_n(m)$ ;  
 $m=const, n=var.$

1. Što je red funkcije  $n$  veći, to je prvi maksimum više udaljen od koordinatnog početka, a taj prvi maksimum je najveća apsolutna vrijednost funkcije za dati red.
2. Sa porastom indeksa modulacije  $m$  funkcija datog reda  $n$  mijenja se oscilatorno, uzimajući sve manje i manje apsolutne vrijednosti.
3. Za male vrijednosti indeksa modulacije  $m$  Besselove funkcije se mogu aproksimirati polinomom oblika

$$J_n(m) \cong \frac{m^n}{2^n n!}$$

4.  $J_n(m)$  počinje brzo da opada sa porastom  $n$  kada je ispunjen uslov  $n > m$ .
5. Opšta osobina Besselovih funkcija je da je

$$J_{n \geq m+2}(m) < 0.1$$

# Širina opsega učestanosti potrebna za prenos UM signala

---

- Spektar UM signala sadrži neograničeno mnogo komponenti. Njihove amplitude su direktno srazmjerne ili Besselovoj funkciji  $J_n(m)$  (u slučaju kada je modulišući signal sinusoidalni ton), ili proizvodu Besselovih funkcija različitih redova i argumenata (u slučaju kada je modulišući signal suma sinusoidalnih tonova).
- Sa porastom reda  $n$ , vrijednosti funkcije  $J_n(m)$  za  $n > m$  počinju naglo da opadaju, tj. javlja se čitav niz komponenti zanemarljivo malih amplituda koje se ne prenose. Zadatak je odrediti koje komponente možemo odbaciti, a da ne dođe do značajnije degradacije kvaliteta prenošenog signala.

## Kriterijum o značajnim bočnim komponentama

- Značajnim bočnim komponentama se smatraju sve one **spektralne komponente koje nose više od  $p\%$  snage nemodulisanog nosioca**. Najčešće se uzima da je ovaj procenat  $p=1\%$ .
- Može se smatrati da je za prenos UM signala potreban onaj opseg učestanosti izvan koga bilo koja od spektralnih komponenti ima snagu manju od 1% snage nosioca.

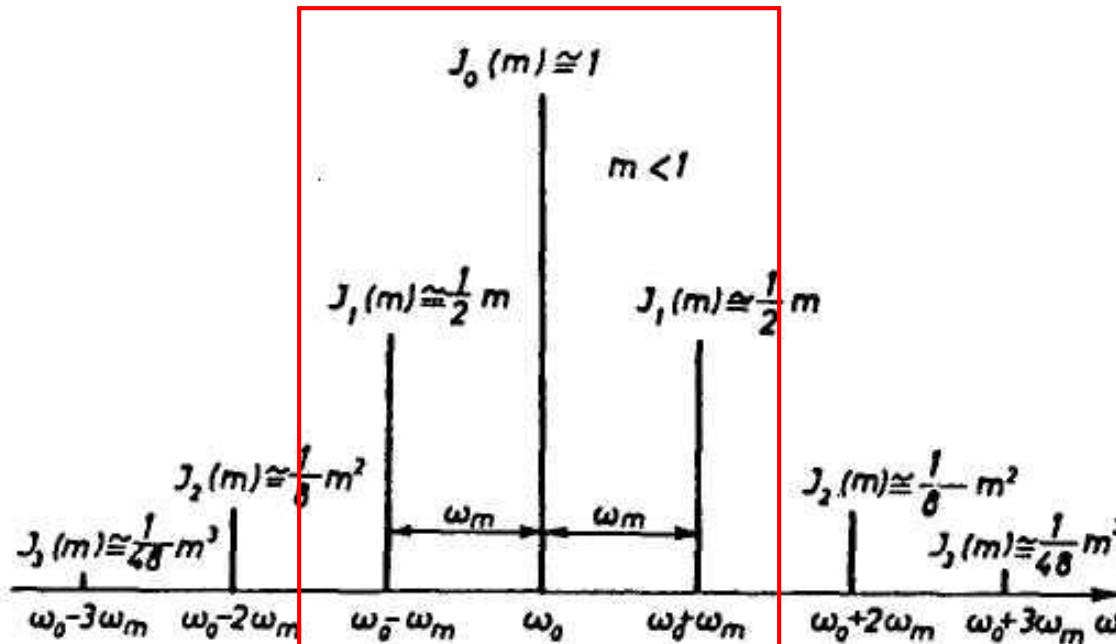


## Širina spektra UM signala modulisanog sinusoidalnim test tonom

- Neka je indeks modulacije mali,  $m < 1$ . Tada je:

$$J_0(m) \cong 1, J_1(m) \cong \frac{1}{2}m, J_2(m) \cong \frac{1}{8}m^2, J_3(m) \cong \frac{1}{48}m^3, \dots$$

$$J_n(m) \cong \frac{m^n}{2^n n!}$$



Slika: Dio amplitudskog spektra ugaono modulisanog signala sinusoidalnim test tonom sa indeksom modulacije  $m < 1$

- Na osnovu definicije značajnih komponenata UM signala, može da se pronađe vrijednost indeksa modulacije  $m$  pri kojoj je dovoljno prenositi samo bočne komponente prvog reda.

- Nemodulisani nosilac ima relativnu amplitudu  $J_0(m)=1$ . Relativna snaga ove komponente je  $J_0^2(m)=1$ .
- Relativna snaga jedne bočne komponente prvog reda treba da zadovolji uslov:

$$J_1^2(m) = \left(\frac{1}{2} m\right)^2 = 0,01$$

odakle je  **$m \leq 0.2$** .

- U svim slučajevima UM signala u kojima je indeks modulacije  $m \leq 0.2$ , dovoljno je prenositi nosilac i prve bočne komponente. Ovakav signal se naziva **uskopjasni UM signal**. Izraz za takav UM signal moći će se približno napisati u sledećem obliku:

$$u(t) \cong U_0 J_0(m) \cos \omega_0 t + U_0 J_1(m) \cos \left[ (\omega_0 - \omega_m) t + \frac{\pi}{2} \right] + U_0 J_1(m) \cos \left[ (\omega_0 + \omega_m) t + \frac{\pi}{2} \right]$$

- Kako je:

$$J_0(m) \cong 1 \text{ i } J_1(m) \cong \frac{1}{2} m,$$

- To je:

$$u(t) \cong U_0 \cos \omega_0 t + \frac{1}{2} m U_0 \cos \left[ (\omega_0 - \omega_m) t + \frac{\pi}{2} \right] + \frac{1}{2} m U_0 \cos \left[ (\omega_0 + \omega_m) t + \frac{\pi}{2} \right]$$

- Ovaj izraz brojem komponenata i njihovim amplitudama podseća na amplitudski modulisan signal KAM tipa. Ali, fazni odnosi se znatno razlikuju.

- U slučaju KAM signala rezultatni fazor je uvijek na realnoj osi, i zavisno od stepena modulacije i vrijednosti  $U_0$  mijenja se samo njegov intenzitet.
- To nije slučaj sa ugaonom modulacijom. Kod nje rezultatni fazor treba da se pomjera oko svog centralnog položaja, ugao  $\Phi_i$  se mijenja onako kako diktira modulišući signal.
  - Vrh fazora  $U_{UM}$  treba uvijek da opisuje dio kruga sa centrom u tački O, pošto je amplituda UM signala konstantna. Međutim, to nije slučaj. Razlog je što smo zanemarili neke bočne komponente, pa je došlo do parazitne amplitudske modulacije.

✓ **Zaključak:**

- U opštem slučaju eliminisanje izvjesnih bočnih komponentata dovodi do parazitne amplitudske modulacije.

- U slučaju kada indeks modulacije nije mali, spektar ugaono modulisanog signala sadrži više od dvije značajne bočne komponente. Kako je:

$$J_{n \geq m+2}(m) < 0.1$$

to će za ovako ugaono modulisane signale biti dovoljno da se sa svake strane nosioca prenese po  $n=m+1$  bočnih komponentata.

- Potrebna širina opsega za prenos UM signala biće definisana Carsonovim obrascem:

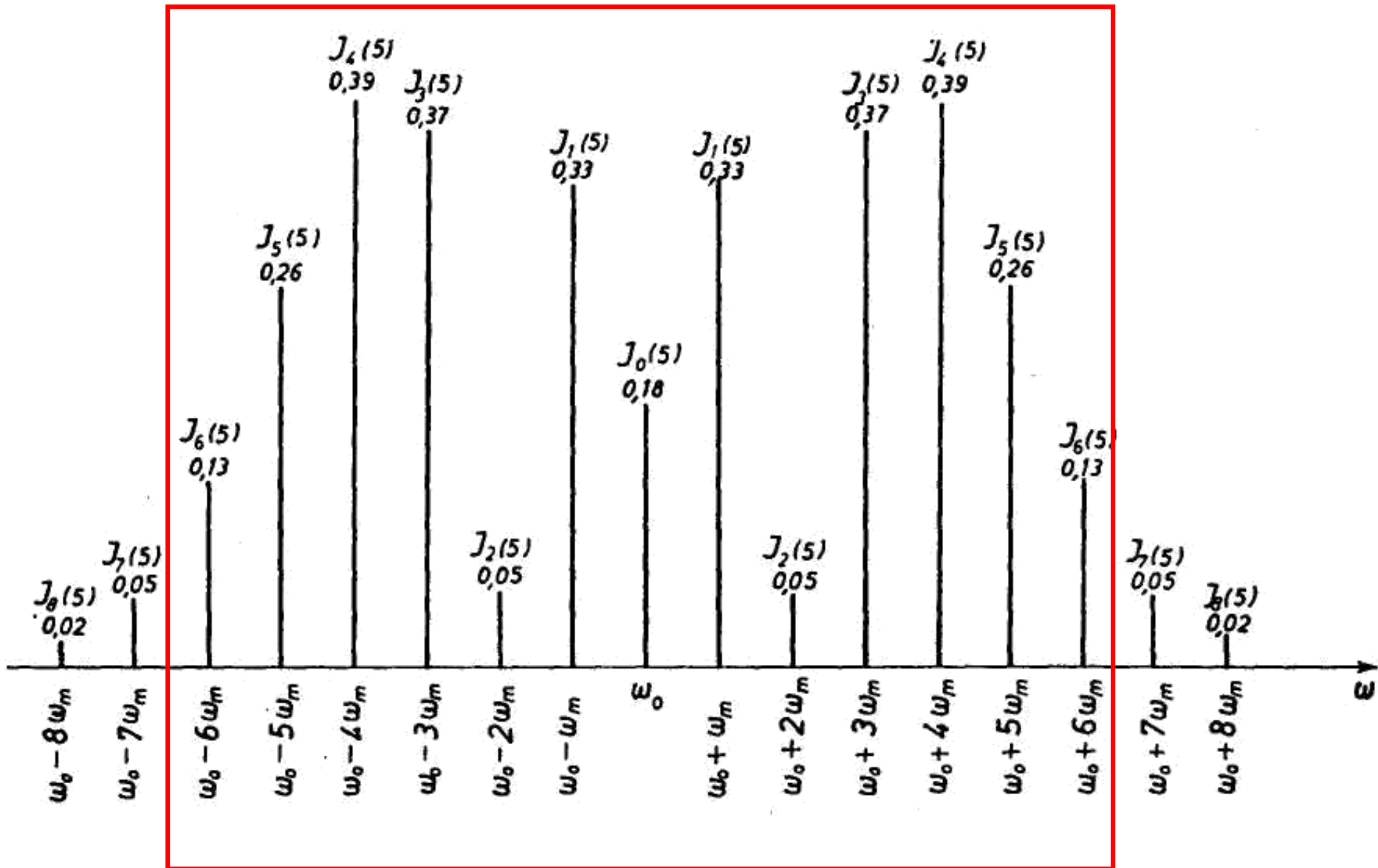
$$B = 2f_m(m+1)$$

- Carsonov obrazac se za male vrijednosti indeksa modulacije  $m \ll 1$  postaje:

$$B \cong 2f_m$$

- Za velike vrijednosti  $m \gg 1$  postaje:

$$B \cong 2mf_m$$



Slika: Dio amplitudskog spektra UM signala sinusoidalnim test tonom za  $m=5$